$f(x) = e^x + x^3 \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} \underset{\lambda\text{-presque partout}}{=} e^x + x^3$

$$\boxed{\begin{aligned} &f : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \\ &\forall b \in \mathbb{R} : \underbrace{\{f \le b\}}_{= f^{-1}(]-\infty, b])} \in \mathcal{F} \iff f \text{ mesurable} \end{aligned}}$$

$\{f \le b\} = \{x \in \Omega \mid f(x) \le b\}$

continue par morceaux

monotone

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-intégrable $\Rightarrow$ f Lebesgue-intégrable et

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f(x)\,d\lambda(x)$$

mesurable $\Leftarrow$ continue

mesurable $\Leftarrow$ étagée

Exercice 1

On considère f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x + x^3 \mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$ puis $g(x) = f(x)\mathbf{1}_{]a,b]}$

1. *Montrer que f est mesurable pour la tribu de Lebesgue.*
2. *Montrer que f n'est pas intégrable pour la tribu de Lebesgue et la mesure de Lebesgue. ($f \notin \mathcal{L}^1((\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R})\lambda), (\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}))$.*
3. *Montrer que g intégrable pour la tribu de Lebesgue et la mesure de Lebesgue. ($g \in \mathcal{L}^1$).*
4. *En utilisant une fonction h judicieusement choisie telle que $h = g$ λ-presque partout, calculer $\int_{\mathbb{R}} g\,d\lambda$.*

$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\Uparrow$

$\mathbb{Q} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\Uparrow$

dénombrables

$\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, q_3, \dots\}$

$= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{q_n\}$

fermé $\Rightarrow$ mesurable

$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est $\bigcup_\infty$-stable

$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $g : \Omega \to \mathbb{R}$

$f = g$ μ presque partout (d.h. $\mu(\{f \ne g\}) = 0$)

f est Lebesgue-intégrable ssi g l'est

$\int |f|\,d\mu < \infty$

$\int f\,d\mu = \int g\,d\mu$

$\int f\,d\mu$ existe ssi $\int g\,d\mu$ existe

f mesurable ou g l'est

$\int f^+\,d\mu < \infty$ ou $\int f^-\,d\mu < \infty$

$(\Rightarrow \int f\,d\mu = \int f^+\,d\mu - \int f^-\,d\mu \in \{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{R})$

2.) À montrer : $\int |f|\,d\mu \overset{!}{=} \infty$

$\int |f|\,d\mu \ge \dots \ge \quad \ge \dots = +\infty$

$$\ge \int_{\mathbb{R}} |e^x + x^3 \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}|\,d\mu \ge \int_{\mathbb{R}_{\ge 0}} |\underbrace{e^x}_{>0} + \underbrace{x^3 \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}}_{>0}|\,d\mu \ge \int_{\mathbb{R}_{>0}} e^x\,d\mu =$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{Monotonie de l'intégral} \\ &f, g \text{ mesurable}, \ 0 \le f \le g \Rightarrow \int f\,d\mu \le \int g\,d\mu \end{aligned}}$$

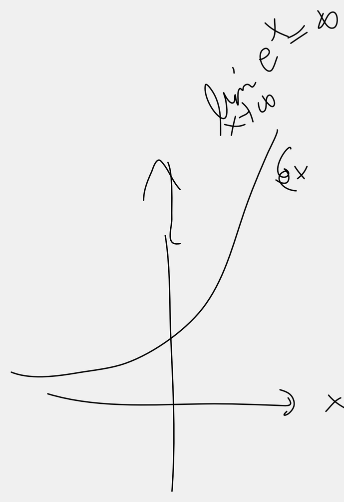
$$= \lim_{b\to\infty} \int_{[0,b]} e^x\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^x\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} [e^x]_0^b = \lim_{b\to\infty} e^b - \overset{1}{\underset{\|}{e^0}}$$

$= +\infty$

$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$



Exercice 1

On considère f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x + x^3 \mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$ puis $g(x) = f(x)\mathbf{1}_{]a,b]}$

1. *Montrer que f est mesurable pour la tribu de Lebesgue.*
2. *Montrer que f n'est pas intégrable pour la tribu de Lebesgue et la mesure de Lebesgue. ($f \notin \mathcal{L}^1((\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R})\lambda), (\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}))$.*
3. *Montrer que g intégrable pour la tribu de Lebesgue et la mesure de Lebesgue. ($g \in \mathcal{L}^1$).*
4. *En utilisant une fonction h judicieusement choisie telle que $h = g$ λ-presque partout, calculer $\int_{\mathbb{R}} g\,d\lambda$.*

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{Définition d'une notation} \\ &\int_A f(x)\,d\mu(x) := \int_\Omega f(x) \cdot \mathbb{1}_A(x)\,d\mu(x) \end{aligned}}$$

$g(x) = f(x) \cdot \mathbb{1}_{[a,b]}$

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)|\,d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \cdot \mathbb{1}_{[a,b]}\,d\lambda = \int_{[a,b]} |f(x)|\,d\lambda(x) \le \underbrace{\int_{[a,b]} e^x\,dx}_{<\infty} + \underbrace{\int_{[a,b]} |x|^3\,dx}_{<\infty} < \infty$$

bornée

bornée

$$\boxed{\begin{aligned} &f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ continue} \Rightarrow \\ &f \text{ prend sa valeur maximale et minimale} \end{aligned}}$$

$[a,b] \subseteq \mathbb{R}_{\ge 0}$

$$\left|\int f(x)\,dx\right| \le \int |f(x)|\,dx$$

Exercice 1

On considère f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x + x^3 \mathbf{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$ puis $g(x) = f(x)\mathbf{1}_{]a,b]}$

1. *Montrer que f est mesurable pour la tribu de Lebesgue.*
2. *Montrer que f n'est pas intégrable pour la tribu de Lebesgue et la mesure de Lebesgue. ($f \notin \mathcal{L}^1((\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R})\lambda), (\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}))$.*
3. *Montrer que g intégrable pour la tribu de Lebesgue et la mesure de Lebesgue. ($g \in \mathcal{L}^1$).*
4. *En utilisant une fonction h judicieusement choisie telle que $h = g$ λ-presque partout, calculer $\int_{\mathbb{R}} g\,d\lambda$.*

4.) $g(x) = (e^x + x^3 \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}})\,\mathbb{1}_{[a,b]} \underset{\lambda\text{-presque partout}}{=} \overbrace{(e^x + x^3) \cdot \mathbb{1}_{[a,b]}}^{h(x)}$

$\{g \ne h\} \subseteq \mathbb{Q}$

$\Rightarrow \mu(g \ne h) \le \mu(\mathbb{Q}) = 0$

Monotonie de la mesure

$A \subseteq B$

$\mu(A) \le \mu(B)$

$$\int_{[a,b]} h(x)\,d\lambda(x) = \int_a^b e^x + x^3\,dx = \left[e^x + \frac{x^4}{4}\right]_a^b$$

$$= e^b + \frac{b^4}{4} - \left(e^a + \frac{a^4}{4}\right)$$

$\sum_{k=1} \frac{}{(kn+1)k^2} \to_{n\to+\infty} \sum_{k=1} \frac{}{k^2}$ (2)

Théorème

$f_n : (\Omega, \mathcal{F}, \mu) \to (\mathbb{R}_{\ge 0}, \mathcal{B}(\mathbb{R}_{\ge 0}))$,

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mesurable $\quad f_n \nearrow f$

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n\,d\mu$$

Théorème

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mesurable $\quad f_n \to f$ μ presque partout

$g : \Omega \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ intégrable $\quad |f_n| \le g \quad \forall n \in \mathbb{N}$

la majorant

$\Rightarrow f$ intégrable

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n\,d\mu$$

$\mu_C(A) = |A|$, $A \subseteq \mathbb{N}$

$\mathbb{N}_{>0}$

Exercice 2

Soit l'espace mesuré $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*), \mu_C)$ (mesure de comptage). On considère les fonctions $f(k) = \frac{1}{k^2}$ et pour tout $n \ge 0$ et pour n entier, $f_n(k) = \frac{n^2-27n+k}{(k+n^2)k^2}$

1. *On considère k fixé, montrer que la suite $f_n(k) \to f(k)$ quand $n \to +\infty$. Interpréter ceci en termes de convergence simple.*
2. *La suite (f_n) est-elle croissante ?*
3. *Montrer qu'il existe M tel que pour tout $(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$*

$$\left|\frac{n^2 - 27n + k}{(k+n^2)}\right| \le M$$

4. *En déduire que l'on peut appliquer le théorème de convergence dominée et en déduire que*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{n^2-27n+k}{(k+n^2)k^2} \to_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \qquad (1)$$

$f_n(k) \xrightarrow{n\to\infty}$

$$\frac{n^2 - 27n + k}{(k+n^2)\,k^2} = \frac{\frac{n^2-27n+k}{n^2}}{\frac{k+n^2}{n^2} \cdot k^2} =$$

$$\frac{a+b+c}{d} = \frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d}$$

$$= \frac{1 - \underbrace{\frac{27}{n}}_{0} + \underbrace{\frac{k}{n^2}}_{0}}{(\underbrace{\frac{k}{n^2}}_{0} + 1) \cdot k^2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{k^2}$$

2.) $f_{\boxed{2}}(3) - f_{\boxed{1}}(3)$

$$= \frac{2^2 - 27 \cdot 2 + 3}{(3 + 2^2) \cdot 3^2} - \frac{1^2 - 27 \cdot 1 + 3}{(3 + 1^2) \cdot 3^2} < 0 \Rightarrow f_n \text{ pas croissante}$$